Übungsstunde 7:

Themen heute:

- Lineare Abbildungen
- Iso- & Automorphismus
- Darstellungsmatrizen zu linearen Abbildungen
- Kommutative Diagramme
- Koordinatenabbildung
- Abbildungsmatrizen unter einem Basiswechsel
- Verkettung linearer Operationen

Nachbesprechung Serie 5:

5.6:

Bemerkung: $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{G} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}$ $\quad \underline{\underline{B}}\,\underline{x} = 0 \Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$\mathrm{Im}(B) = \underline{\underline{\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}\right\}}}$

$\mathrm{Ker}(B) = \underline{\underline{\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}}$ Der Kern enthält im Minimum den Ursprung!

$$\underline{\underline{D}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & \cdot & \cdot & - & - & - \\ -3 & \cdot & \cdot & - & \cdot & \cdot \end{bmatrix}}_{5}$$

Kern lebt in Urbildraum

$\underline{\underline{D}}\,\underline{x} = \underline{b}$

Bild lebt im Bildraum

$\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \dots\right\}$

$\mathrm{Im}(D) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \dots\right\}$

$$\dim(\mathrm{Ker}) + \dim(\mathrm{Im}) = n = 5$$

Spaltenraum = Bild!

Lineare Abbildungen:

V, W zwei VR, $F: V \to W$, $x \mapsto F(x) = b$

F heisst linear, falls:

(i) $\forall x, y \in V$: $\quad F(x+y) = F(x) + F(y)$

(ii) $\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\quad F(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot F(x)$

$\leadsto$ Überprüft: $F(\alpha x + y) = \alpha F(x) + F(y)$

Bsp: $\mathcal{F}: V \to W,\ \underline{x} \mapsto \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ Bekannte Rechenregeln verwenden

$$\mathcal{F}(\alpha \underline{x} + \underline{y}) = \underline{\underline{A}}(\alpha \underline{x} + \underline{y}) = \alpha \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{A}}\,\underline{y} = \alpha \mathcal{F}(\underline{x}) + \mathcal{F}(\underline{y})$$

Bsp: $\mathcal{F}: V \to W,\ x \mapsto 0$

$$\mathcal{F}(\alpha \underline{x} + \underline{y}) = 0 = \alpha \cdot 0 + 0 = \alpha \mathcal{F}(\underline{x}) + \mathcal{F}(\underline{y})$$

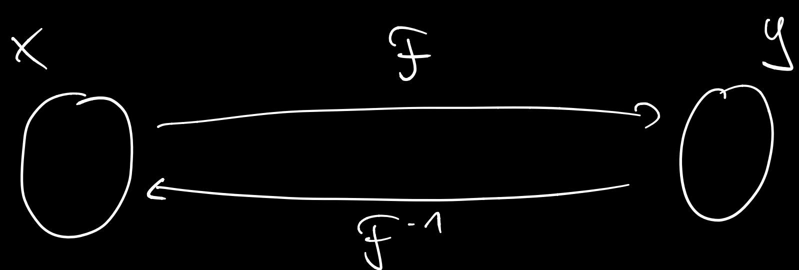
Bsp: $\mathcal{F}: V \to W,\ x \mapsto x + \gamma,\ \gamma \neq 0$

$$\mathcal{F}(\alpha x + y) = (\alpha x + y) + \gamma \neq \alpha \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y) = \alpha x + \alpha \gamma + y + \gamma$$

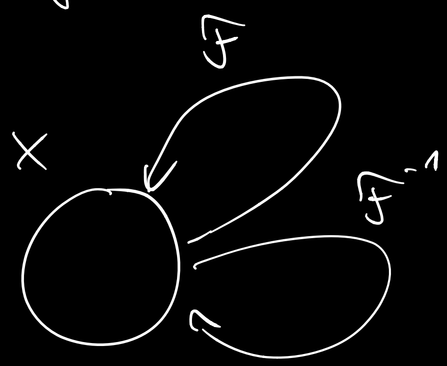
Bsp: $\mathcal{F}: V \to W,\ x \mapsto \frac{d}{dt} x$

$$\mathcal{F}(\alpha x + y) = \frac{d}{dt}(\alpha x + y) = \alpha \cdot \frac{d}{dt} x + \frac{d}{dt} y$$

Isomorphismus / Automorphismus:



X & Y sind Isomorph



X ist automorph

Frage: [: : : :] Isomorph? Automorph? Nichts

Isomorphe Abbildung $\Leftrightarrow$ Quadratischen Matrix mit vollem Rang

Abbildungsmatrizen / Darstellungsmatrizen lin. Abb.

Bsp.: Sei $V = \mathcal{P}_2$, $W = \mathcal{P}_1$, $\mathcal{F}: V \to W$, $p(x) \mapsto p'(x) + p''(x)$

Koordinaten- / Basiswahl: $B = \{ b^{(1)} = 1, b^{(2)} = x, b^{(3)} = x^2 \}$

$C = \{ c^{(1)} = 1, c^{(2)} = x \}$

$\Rightarrow V: \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}$, $W: \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$ So muss ich einen Vektor in den Basen B & C interpretieren

$$\begin{array}{c|c} B & C \\ 1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 0 & = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x \\ x \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 & = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x \\ x^2 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2x+2 & = 2 \cdot 1 + 2 \cdot x \end{array} \Bigg\} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}}$$

neu

Bsp:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_2 & & \mathcal{P}_1 \\ p(x) = x^2 + 4x - 7 & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 2x + 4 + 2 = 2x + 6 = q(x) \\ k_x \downarrow \uparrow k_x^{-1} & & k_y \downarrow \uparrow k_y^{-1} \\ \underline{x} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\underline{\underline{A}}} & \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{y} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Kommutative Diagramme:

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

im Allgemeinen

$\Downarrow$

$f(g(x)) \neq g(f(x))!$

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$

Falls $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \iff$ Das Diagramm kommutiert

"Die Wege sind vertauschbar"

Koordinatenabbildung:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[d, shift right, "k_X"'] & Y \arrow[l, shift left, "F^{-1}"] \arrow[d, shift right, "k_Y"'] \\ V = \mathbb{R}^n \arrow[r, shift left, "A"] \arrow[u, shift right, "k_X^{-1}"'] & W = \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \arrow[l, shift left, "A^{-1}"] \arrow[u, shift right, "k_Y^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Abbildungsmatrix unter Koordinatenwahl / Basiswechsel:

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[d, shift right, "k_X"'] & Y \arrow[l, shift left, "F^{-1}"] \arrow[d, shift right, "k_Y"'] & \\
\mathbb{R}^n & \tilde{V} \arrow[r, shift left, "\tilde{A}"] \arrow[u, shift right, "k_X^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "\underline{\underline{T}}"'] & \tilde{W} \arrow[l, shift left, "\tilde{A}^{-1}"] \arrow[u, shift right, "k_Y^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "\underline{\underline{T}}'"'] & \mathbb{R}^m \\
 & V \arrow[r, shift left, "A"] \arrow[u, shift right, "\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{S}}"'] & W \arrow[l, shift left, "A^{-1}"] \arrow[u, shift right, "\underline{\underline{S}}'"'] &
\end{tikzcd}
$$

Bsp 80:
(Zardini)

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 7x + 5y - 8z \\ 5x + 3y - 4z \\ -x - 3y + 8z \end{bmatrix}$$

a) $\mathcal{E} = \{\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}, \underline{e}^{(3)}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &\overset{F}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &\overset{F}{\longmapsto} \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} = -8 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 8 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \underline{\underline{\tilde{A}}} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 7 & 5 & -8 \\ 5 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & 8 \end{bmatrix}}}$$

b) $\mathcal{B} = \left\{ b^{(1)} = e^{(1)},\ b^{(2)} = e^{(1)} + e^{(2)},\ b^{(3)} = e^{(2)} + e^{(3)} \right\}$

$$= \left\{ b^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ b^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ b^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Wollen $\quad \mathcal{B} \underset{T^{-1}}{\overset{T}{\rightleftarrows}} \mathcal{E}$

$\mathcal{B} \qquad\qquad \mathcal{E}$

$$\left.\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

$\rightarrow$ Gauss-Jordan: $\quad T \mid I \rightarrow I \mid \underline{\underline{T^{-1}}}$

$$\underline{\underline{T}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "\underline{\underline{\tilde{A}}}"] \arrow[d, shift left, "T^{-1}"] & \mathcal{E} \arrow[d, shift left, "T^{-1}"] \\
\mathcal{B} \arrow[r, "\underline{\underline{A}}"'] \arrow[u, shift left, "T"] & \mathcal{B} \arrow[u, shift left, "T"]
\end{tikzcd}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{T}}^{-1}\, \underline{\underline{\tilde{A}}}\, \underline{\underline{T}} = \ldots \quad \text{(mühsame Rechnung)}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 12 & -6 \\ -1 & -4 & 5 \end{bmatrix}}}$$

Alternativ: Macht dasselbe wie bei a)

$\mathcal{B}$

$\mathcal{B}$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \xmapsto{F} \underline{\underline{\tilde{A}}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\5\\-1\end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 6\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - 1\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \xmapsto{F} = \begin{bmatrix}12\\8\\-4\end{bmatrix} = 0\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 12\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \xmapsto{F} = \begin{bmatrix}-3\\-1\\5\end{bmatrix} = 3\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

Verkettung lin. Abb.:

```tikzcd
V \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "k_V"'] & W \arrow[r, "G"] \arrow[d, shift right, "k_W"'] & U \arrow[d, shift right, "k_U"'] \\
A \arrow[r, "\underline{\underline{M}}_A^B"'] \arrow[u, shift right, "k_V^{-1}"'] \arrow[rr, bend right, "\underline{\underline{M}}_A^C"'] & B \arrow[r, "\underline{\underline{M}}_B^C"'] \arrow[u, shift right, "k_W^{-1}"'] & C \arrow[u, shift right, "k_U^{-1}"']
```

$g \circ f$

$g(f(x))$

$$\Rightarrow M_A^C = M_B^C \circ M_A^B$$
$$= M_B^C \cdot M_A^B$$

$\rightarrow$ Verkettung ist die Matrixmultiplikation